10.3.16 Diferenciální a integrální počet ve fyzice

Předpoklady: 100315

Derivační vztahy

Jedním z objevitelů diferenciálního a integrálního počtu byl Isaac Newton. Jeho zájem nebyl prý primárně matematický, během práce na své mechanice zjistil, že dosavadní matematika neumožňuje přesně zachytit děje v přírodě a nezbylo mu nic jiného než chybějící část matematiky vytvořit vlastními silami.
Proč?
V přírodě poměrně často platí, že jedna veličina je změnou jiné veličiny v čase:

- rychlost je změna dráhy za změnu času: $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$,
- zrychlení je změna rychlosti za změnu času: $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$,
- výkon je změna vykonané práce za změnu času: $P = \frac{\Delta W}{\Delta t}$,
- elektrický proud je změna náboje za změnu času: $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$,
- indukované elektrické napětí je záporně vzatá změna magnetického indukčního toku za změnu času: $U_i = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$,
- …

Ve všech případech jsme si říkali, že okamžitou hodnotu veličiny na levé straně určíme tím přesněji, čím kratší bude sledovaný časový interval Δt. Naopak čím bude časový interval delší, tím víc se výsledná hodnota zlomku bude blížit průměrné hodnotě veličiny vlevo.

Například zcela přesnou hodnotou okamžité rychlosti $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ by bylo číslo, ke kterému by se blížily hodnoty zlomku $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ pro stále menší a menší hodnoty Δt. Jde tedy o $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$, což není nic jiného než definice derivace. Rychlost je tedy derivací dráhy podle času: $v = \frac{ds}{dt}$. Stejně to platí i v ostatních případech: $a = \frac{dv}{dt}$, $P = \frac{dW}{dt}$, $I = \frac{dQ}{dt}$, $U_i = -\frac{d\Phi}{dt}$…

Nemusíme si tedy pamatovat vzorce pro rychlost v jednotlivých druzích pohybu, stačí, když známe vzorec pro dráhu a z něj můžeme určit derivováním i vzorce pro rychlost a zrychlení.

Př. 1: Okamžitá výchylka harmonického oscilátoru je dána rovnicí $y = y_m \sin(\omega t)$. Najdi vzorce pro okamžitou rychlost a i okamžité zrychlení.

$$v = \frac{dy}{dt} = \left[y_m \sin(\omega t)\right]' = y_m \cos(\omega t) \cdot \omega = y_m \cdot \omega \cos(\omega t) = v_m \cos(\omega t)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \left[y_m \omega \cos(\omega t)\right]' = y_m \omega\left[-\sin(\omega t)\right] \cdot \omega = -y_m \cdot \omega^2 \sin(\omega t) = -a_m \sin(\omega t)$$

Derivace jsou tedy skvělá zpráva: Pokud známe vzorec pro polohu pro libovolný druh pohybu a umíme derivovat, nemusíme se učit vzorce pro rcyhlost a zrychlení, protože je snadno zjistíme derivováním.

V praxi většinou vycházíme z opačné situace - známe zrychlení (díky znalosti působících sil) a snažíme se určit vztahy pro okamžitou rychlost a okamžitou výchylku daného pohybu, abychom zjistili, jak se bude sledovaná situace vyvíjet.

Podíváme se nejdříve na vztah mezi rychlostí a zrychlením: $a = \frac{dv}{dt} \quad / \cdot dt$

$dv = a \cdot dt$ (tento výraz odpovídá „trojúhelníčkovému“ vztahu $\Delta v = a \cdot \Delta t$, který jsme používali při výpočtech v tabulce v učebnici fyziky například v hodině 010119).
My však nechceme spočítat přírůstek rychlosti, ale její hodnotu v nějakém času $\Rightarrow$ musíme sečíst všechny přírůstky a tím spočítat integrál.

$v = \int dv = \int a \cdot dt$

Pokud se nebudeme ptát po velikosti rychlosti v konkrétním čase, stačí nám funkce, kterou získáme integrováním.
Pokud nás zajímá i konkrétní hodnota, můžeme do získané funkce dosadit (neboli spočítat určitý integrál).

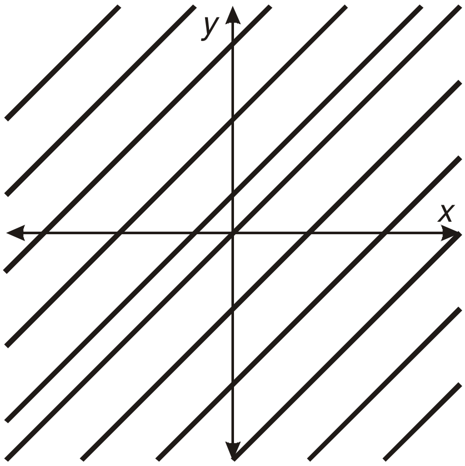
Zkusíme to pro rychlost rovnoměrně zrychleného pohybu:
Ronovměrně zrychlený pohyb: $a =$ konstanta

$v = \int a \cdot dt = a \int dt = a \cdot t + C$

Jaký má konstanta *C* význam v matematice?
Při hledání neurčitého integrálu hledáme všechny funkce, které po zderivování dají funkci, kterou jsme integrovali $\Rightarrow$ v našem případě, hledáme všechny funkce, které se zderivují na konstantu *a*.
Náš výsledek: $y = at + C$, tedy nekonečně mnoho funkcí

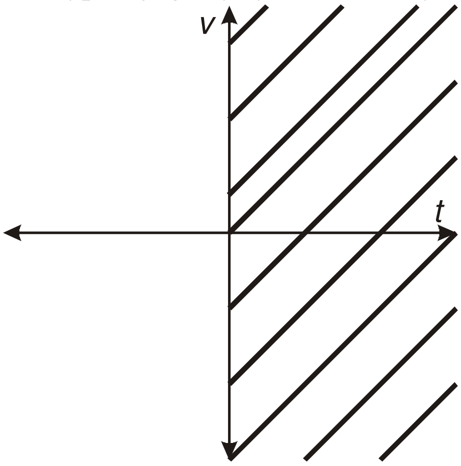
$y = at;\ y = at + 1;\ y = at - 5;\ y = at + 1000\pi;\ y = at - 0{,}00005;\ldots$

Jak vypadají tyto funkce v grafu?



Nekonečně mnoho rovnoběžných přímek. Jejich svislé posunutí určuje konkrétní hodnota konstanty C (hodnoty všech těchto funkcí se mění stejným způsobem $\Rightarrow$ všechny tyto funkce mají stejnou derivaci).

Jak vypadají grafy rychlosti různých rovnoměrně zrychlených pohybů se zrychlením a?



Nekonečně mnoho rovnoběžných přímek. Jejich svislé posunutí určuje konkrétní hodnota počáteční rychlosti v_0 (všechny tyto grafy se mění stejným způsobem $\Rightarrow$ všechny mají stejnou hodnotu zrychlení a).

Co tedy znamená integrační konstanta C ve fyzice? V tomto konkrétním případu konstanta C představuje hodnotu počáteční rychlosti v_0. Obecně nám integrační konstanta umožňuje popsat počáteční podmínky.

Př. 2: Urči integrováním vzorec pro dráhu rovnoměrně zrychleného pohybu.

Obecně výpočet dráhy:

$$v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow ds = v \cdot dt$$

$$s = \int ds = \int v \cdot dt$$

Konkrétně pro rovnoměrně zrychlený pohyb:

$$s = \int v \cdot dt = \int \left(v_0 + at \right) dt = \int v_0 \cdot dt + a \int t \cdot dt = v_0 t + a \frac{t^2}{2} + C = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

Integrály jsou snad ještě lepší než derivace. U pohybů si nemusíme pamatovat žádné vzorce. Stačí vědět, jak se v čase mění zrychlení a vzorce pro rychlost i polohu určíme integrováním.

Stejné možnosti máme i u dalších dvojic veličin svázaných derivačním vztahem: $P = \frac{dW}{dt}$, $I = \frac{dQ}{dt}$, $U_i = -\frac{d\Phi}{dt}$, …

Odvozování vztahů

Vzorec pro práci: $W = Fs$ - funguje pouze v případě, že síla se na celé dráze nemění $\Rightarrow$ univerzálnější postup: $dW = F \cdot ds$ - malý přírůstek práce určíme jako součin síly a malého přírůstku dráhy, tyto přírůstky můžeme určovat zcela přesně i v případě, že se síla během pohybu mění.

Celkovou práci pak získáme jako integrál: $W = \int_{s_1}^{s_2} F\, ds$.

Čemu se rovná vykonaná práce, pokud na těleso působí jediná síla, která je zároveň výslednicí?

Takové těleso se pohybuje se zrychlením $a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = ma$, dosadíme do integrálu:

$$W = \int_{s_1}^{s_2} F\, ds = \int_{s_1}^{s_2} ma\, ds = \int_{s_1}^{s_2} m\frac{dv}{dt}\, ds = \int_{s_1}^{s_2} m\frac{ds}{dt} dv = \int_{s_1}^{s_2} mvdv = \int_{v_1}^{v_2} mvdv = m\left[\frac{v^2}{2}\right]_{v_1}^{v_2} =$$

$$= \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = E_{k2} - E_{k1} = \Delta E_k$$

V tomto případě se vykonaná práce rovná změně kinetické energie.

Jak to vypadá, když se naopak působící síla rovná gravitační síle, která táhne těleso k zemi (co se děje, když něco zvedáme)?

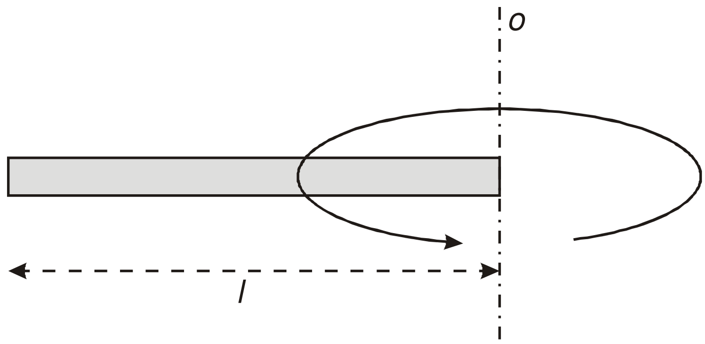
$$W = \int_{h_1}^{h_2} F\, ds = \int_{h_1}^{h_2} F_g\, ds = \int_{h_1}^{h_2} md\, ds = mg\,[s]_{h_1}^{h_2} = mgh_2 - mgh_2 = E_{p2} - E_{p1} = \Delta E_p$$

V tomto případě se vykonaná práce rovná změně potenciální energie.

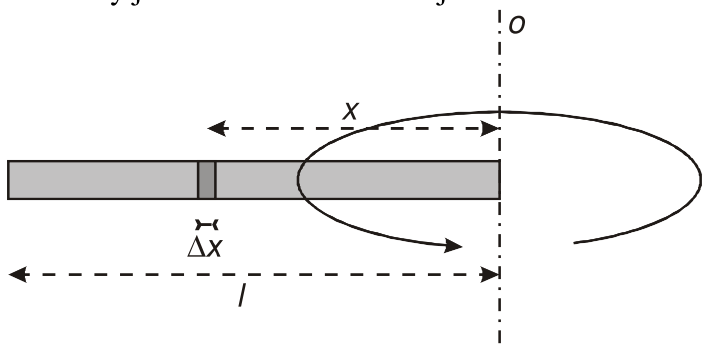
Sčítání „nekonečně moha nekonečně malých kousků"

Vzorec pro výpočet momentu setrvačnosti: $J = mr^2$ platí pro pevný bod.
Necháme homogenní tyč (na průřezu nezáleží) o délce *l* rotovat kolem jednoho jejího konce.

Vztah $J = mr^2 = ml^2$ platí je pro kousiček na úplném konci. Jen tato část tyče má od osy otáčení vzdálenost *l*, všechny ostatní kousky tyče jsou k ose otáčení blíže $\Rightarrow$ moment setrvačnosti určitě bude menší než ml^2.



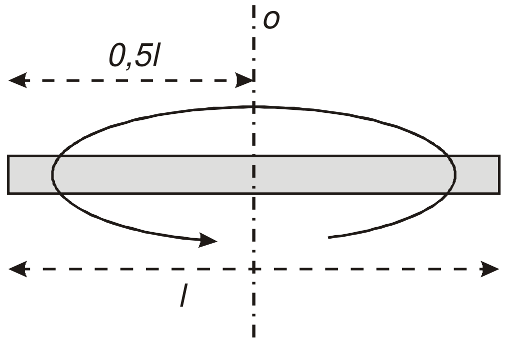
Mohli bychom tyč rozdělit například na 10 dílů, u každého předpokládat, že je v něm soustředěna desetina hmotnosti tyče a všechna je umístěna v těžišti kousku $\Rightarrow$ získali bychom deset částečných momentů setrvačnosti, které bychom pak sečetli. Výsledek by nebyl úplně přesný, ale mohli bychom ho zpřesnit tím, že bychom tyč rozdělili na větší počet menších kousků $\Rightarrow$ čím více, čím tenčích kousků bychom použili, tím přesnější výsledek bychom získali $\Rightarrow$ zcela přesně bychom moment setrvačnosti určili, kdybychom sečetli nekonečně mnoho nekonečně malých kousků (což není nic jiného než výpočet integrálu).
Jak velký je moment setrvačnosti jednoho takového nekonečně tenkého kousku?



Na obrázku kousek tyče samozřejmě není nekonečně tenký, proto jsme si jeho tloušťku označili Δx . Moment setrvačnosti kousku označíme ΔJ .
Platí: $\Delta J = x^2 \Delta m = x^2 \rho \Delta V = x^2 \rho S \Delta x$ (používáme klasické vztahy: $J = mx^2$, $m = V\rho$, $V = S \cdot h = S \cdot \Delta x$, kde m je hmotnost, V je objem, ρ je hustota, S je průřez tyče).
Když přejdeme k nekonečně tenkému kousku, zaměníme Δ za d.
$dJ = x^2 dm = x^2 \rho dV = x^2 \rho S dx$
U všech kousků je vzorec pro výpočet stejný, jen vzdálenost x kousků od osy se mění od 0 po l $\Rightarrow$ tedy nejmenší hodnota x je 0, největší hodnota je l a máme za x dosadit všechna čísla mezi 0 a l $\Rightarrow$ získali jsme meze integrálu.

$$J = \int_0^l x^2 \rho S \, dx = \rho S \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^l = \rho S \frac{l^3}{3} = \rho S l \frac{l^2}{3} = \rho V \frac{l^2}{3} = m \frac{l^2}{3} = \frac{1}{3} m l^2$$

Př. 3: Urči moment setrvačnosti tyče, pokud bude rotovat okolo osy otáčení, která prochází jejím těžištěm (osa otáčení je kolmá na tyč).



Téměř stejný příklad jako předchozí, jen dvě změny:

- největší vzdálenost kousku tyče od osy je $\frac{l}{2}$ $\Rightarrow$ změníme horní mez integrálu,
- tyč jde od osy na dvě strany (kolem osy rotují dvě poloviny, každá o délce $\frac{l}{2}$ $\Rightarrow$ výsledek vynásobíme dvěma.

$$J_p = \int_0^{\frac{l}{2}} x^2 \rho S\, dx = \rho S \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{l}{2}} = \rho S \frac{\left(\frac{l}{2}\right)^3}{3} = \rho S l \frac{l^2}{24} = \rho V \frac{l^2}{24} = m\frac{l^2}{24} = \frac{1}{24} m l^2$$

Tyč jde od osy na obě strany: $J = 2 \cdot \frac{1}{24} m l^2 = \frac{1}{12} m l^2$.

Obec ně tedy můžeme moment setrvačnosti počítat podle vzorce: $J = \int x^2 dm$, kde dm jsou hmotnost nekonečně mnoha nekonečně malých kousků tělesa, jejichž části mají stejnou vzdálenost od osy otáčení (proto jsme tyč zkrájeli na kousky rovnoběžné s osou otáčení) a jejich velikost jsme schopni vyjádřit pomocí vzdálenosti x od osy otáčení.

Podobným způsobem jsme v matematice odvozovali vzorce pro objemy.

Vypočet těžiště

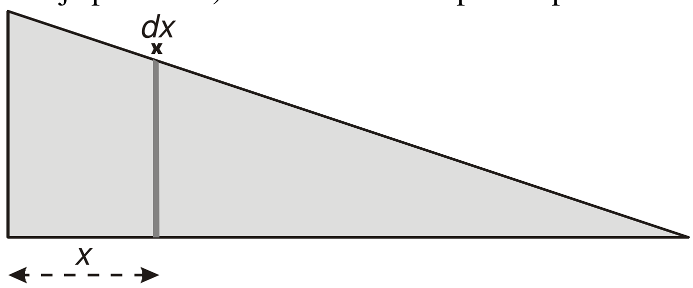
Vypočet těžiště tělesa složeného ze dvou částí: $x_T = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$

Př. 4: Rozšiř vzorec pro tělesa složená ze tří části. Jak by vypadal vzorec pro těleso složené z n částí?

$$x_T = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$x_T = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}$$

Pokud budeme mít těleso, jehož tvar se plynule mění, můžeme si ho představit jako nekonečně mnoho nekonečně tenkých kousků (každý z nich z konstantní vzdáleností od okraje předmětu) a čitatel zlomku spočítat pomocí integrálu.



Př. 5: Vytvoř vzorec pro výpočet těžiště tělesa o hmotnosti m pomocí integrálu.

Těleso rozdělíme na jednotlivé části s konstantní vzdálenost od okraje tělesa x_i a hmotností Δm_i: $x_T = \frac{\Delta m_1 x_1 + \Delta m_2 x_2 + ... + \Delta m_n x_n}{\Delta m_1 + \Delta m_2 + ... + \Delta m_n} = \frac{x_1 \Delta m_1 + x_2 \Delta m_2 + ... + x_n \Delta m_n}{m}$.

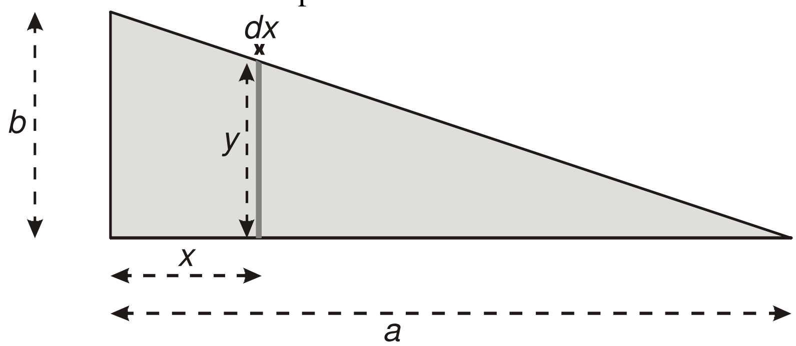
Platí: $\Delta m_1 + \Delta m_2 + ... + \Delta m_n = m$.

Výpočet bude tím přesnější, čím budou kousky menší, zcela přesný, když jich bude nekonečně mnoho a členy v čitateli sečteme pomocí integrálu.

$$x_T = \frac{\int x \, dm}{m}$$

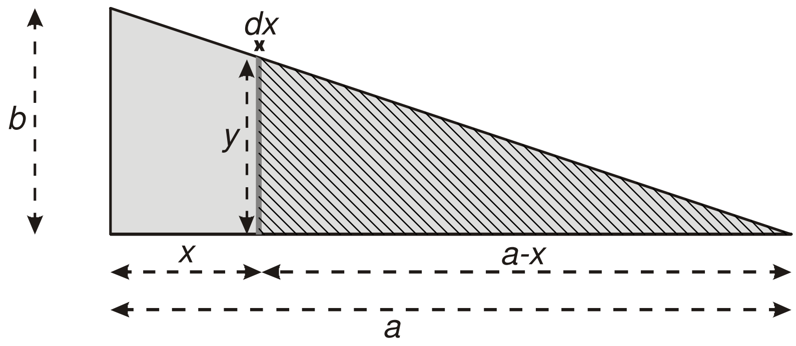
Př. 6: Vypočti souřadnice těžiště tělesa o tvaru pravoúhlého trojúhelníku.

Představíme si kousek předmětu o tloušťce dx.



Hmotnost kousíčku dm potřebujeme vyjádřit pomocí vzdálenosti x a rozměrů trojúhelníku a, b. Předpokládáme, že trojúhelník je homogenní, má tedy všude stejnou hustotu. Protože jej bereme jako plošný obrazec, můžeme používat místo normální hustoty, hustotu plošnou, takovou, že platí: $m = \rho_S \cdot S$, pak tedy $dm = \rho \, dS = \rho y \, dx$.

Pro vyjádření výšky kousku y, použijeme podobnost trojúhelníků:



$$\frac{y}{a-x}=\frac{b}{a}\Rightarrow y=\frac{b}{a}(a-x)\;\Rightarrow\; dm=\rho\,dS=\rho\frac{b}{a}(a-x)\,dx$$

Hodnoty proměnné x měníme od 0 do a. Dosadíme do integrálu.

$$x_T=\frac{\int_0^a x\rho\frac{b}{a}(a-x)\,dx}{m}=\frac{\rho\frac{b}{a}\int_0^a x(a-x)\,dx}{m}=\frac{\rho\frac{b}{a}}{m}\int_0^a xa-x^2\;dx=\frac{\rho b}{ma}\left[a\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^a=$$

$$\frac{\rho b}{ma}\left(\frac{a^3}{2}-\frac{a^3}{3}\right)=\rho\frac{b}{am}\cdot\frac{a^3}{6}=\frac{\rho b}{m}\cdot\frac{a^2}{6}=\frac{\rho ba\cdot\frac{a}{6}}{m}=\frac{\rho\frac{ab}{2}\cdot\frac{a}{3}}{m}=\frac{\rho S\cdot\frac{a}{3}}{m}=\frac{m\cdot\frac{a}{3}}{m}=\frac{a}{3}$$

X-ová souřadnice těžiště bude v třetině délky strany a (a protože nezáleží na tom, jak si trojúhelník otočíme, platí že y-ová souřadnice těžiště bude ve vzdálenosti $\frac{b}{3}$).

Shrnutí: